UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-1
TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN ESCRITO 2

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- ✓ Forman parte de los criterios de calificación: el procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática.
- ✓ Se permite el uso personal de una calculadora científica básica, no programable ni graficadora.
- ✓ Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- ✓ La prueba consta de 04 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- ✓ Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- ✓ Mantener encendidos y al alcance de la mano el teléfono celular, *smartwatch*, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- ✓ Conversar o hacer consultas durante el desarrollo de la prueba.
- ✓ Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas o de preguntas.

Fecha: 24 / 05 / 2024

---

1. Dadas las funciones

$$f(x) = (x^2 - 7x)\sqrt[3]{5x^2 + 3} + \frac{(x^2 - 2x)^2}{2x - 1}$$

   a) (4 ptos) Utilice las reglas de derivación para hallar $f'(x)$.
   b) (1 pto) Halle la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución.

a) Para hallar $f'(x)$ usaremos las reglas de derivación.

$$f'(x) = \left\{(x^2 - 7x)\sqrt[3]{5x^2 + 3}\right\}' + \left\{\frac{(x^2 - 2x)^2}{2x - 1}\right\}'$$

$$f'(x) = \{(x^2 - 7x)\}' \sqrt[3]{5x^2 + 3} + (x^2 - 7x)\left\{\sqrt[3]{5x^2 + 3}\right\}'$$

$$+ \frac{\{(x^2 - 2x)^2\}'(2x - 1) - (x^2 - 2x)^2\{2x - 1\}'}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = (2x-7)\sqrt[3]{5x^2+3} + (x^2-7x)\left\{\frac{10x}{3\left[\sqrt[3]{5x^2+3}\right]^2}\right\}$$

$$+ \frac{2(x^2-2x)(2x-2)\,(2x-1) - (x^2-2x)^2(2)}{(2x-1)^2}$$

b) El punto de tangencia es $(1; f(1)) = (1; -11)$
La pendiente de la recta tangente es $m_T = f'(1) = -17$, lo cual implica que la pendiente de la recta normal es $m_N = 1/17$. Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es

$$L_N: y + 11 = \left(\frac{1}{17}\right)(x-1)$$

2. El número de habitantes de una comunidad t años después de su fundación es

$$P(t) = \frac{100 + 5t\sqrt{t^2+16}}{t+1} \quad \text{miles de habitantes.}$$

a) (1 pto) ¿Cuál fue la población inicial de dicha comunidad?
b) (2 ptos) Utilice las reglas de derivación para hallar $P'(t)$.
c) (1.5 ptos) Determine a qué ritmo variaba la población de dicha comunidad tres años después de su fundación.
d) (1.5 ptos) Calcule $P'(8)$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

Solución.

a) Como $P(0) = 100$, se sigue que la población inicial de la comunidad fue de 100 000 habitantes.
b) Para hallar $P'(t)$ usaremos la regla de la derivada de un cociente.

$$P'(t) = \frac{\left\{5\sqrt{t^2+16} + \frac{5t^2}{\sqrt{t^2+16}}\right\}(t+1) - \left\{100 + 5t\sqrt{t^2+16}\right\}(1)}{(t+1)^2}$$

c) Como $P'(3) = -2.44$
A los tres años de su fundación, la población de la comunidad disminuye a razón de 2 440 habitantes por año aproximadamente.
d) Como $P'(8) = 3.29$
e) A los ocho años de su fundación, la población de la comunidad aumenta a razón de 3 290 habitantes por año aproximadamente.

3. (3 ptos) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{3-2x}\,,$$

halle $f'(1)$ mediante la definición de derivada.

Solución.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{3-2x}\,-1}{x-1}\right]\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right) = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{\left[\sqrt{3-2x}\,+1\right]\left[\sqrt{3-2x}\,-1\right]}{\left[\sqrt{3-2x}\,+1\right](x-1)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left\{\frac{-2(x-1)}{\left[\sqrt{3-2x}\,+1\right](x-1)}\right\} = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{-2}{\sqrt{3-2x}\,+1}\right\} = -1$$

4. (6 ptos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-20x-40}{4-x^2} & , \quad x < -2 \\ Ax^2 + Bx - 5 & , \quad -2 \le x \le 1 \\ Cx^3 + 3x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

halle los valores de las constantes A, B y C, sabiendo que f es continua en $x = -2$ y derivable en $x = 1$.

Solución.

Como f es continua en -2 se tiene:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = f(-2) \ldots (1)$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-}\left\{\frac{-20x-40}{4-x^2}\right\} = -5$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+}\{Ax^2 + Bx - 5\} = 4A - 2B - 5$$

$$f(-2) = 4A - 2B - 5$$

Al reemplazar en (1) se tiene:

$$-5 = 4A - 2B - 5 = 4A - 2B - 5 \implies \boldsymbol{B = 2A} \ldots . (\boldsymbol{\alpha})$$

Como f es continua en 1 se tiene:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \ldots (2)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\{Ax^2 + Bx - 5\} = A + B - 5$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\{Cx^3 + 3x - 2\} = C + 1$$

$f(1) = A + B - 5$

Al reemplazar en (2) se tiene:

$$A + B - 5 = C + 1 = A + B - 5 \implies \boldsymbol{C = A + B - 6} \ldots . (\boldsymbol{\beta})$$

<u>Como f es derivable en 1 se tiene:</u>

$$f'(1^-) = f'(1^+) \ldots (3)$$

$x < 1$: $f(x) = Ax^2 + Bx - 5 \implies f'(x) = 2Ax + B \implies f'(1^-) = 2A + B$

$x > 1$: $f(x) = Cx^3 + 3x - 2 \iff f'(x) = 3Cx^2 + 3 \implies f'(1^+) = 3C + 3$

Al reemplazar en (3) se tiene:

$$\boldsymbol{2A + B = 3C + 3} \ldots (\boldsymbol{\gamma})$$

De $(\alpha), (\beta)$ y (γ) se tiene $A = 3, B = 6, C = 3$.